Exponentielle et Logarithme

1. Introduction

La fonction exponentielle notée $f(x) = exp(x)$ est une bijection définie continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Tandis que la fonction logarithme népérien noté $f(x) = ln(x)$ est une bijection définie continue et dérivable de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Historiquement, la fonction logarithme est apparue en première au 16ième siècle car elle simplifiait des calculs utilisés en astronomie, en navigation ou encore en banque grâce à sa capacité à transformer des produits en somme.

2. Définitions

Il existe plusieurs façons de définir ces fonctions :
Pour l'exponentielle
$exp(x) = e^x$ avec e le nombre d'Euler (e= 2,71828183)

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

L'exponentielle est la solution de $f'(x) = f(x)$ telle que $f(0) = 1$
L'exponentielle est l'unique fonction telle que $f(x + y) = f(x)f(y)$

Pour le logarithme népérien

$$\forall x \in [-1; 1]\ \ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n + 1}$$

$$x \in]0; +\infty]\ \ \ln(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{y-1}{y+1})^{2n+1}}{2n + 1}$$

Le logarithme est la primitive s'annulant en 1 de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$
Le logarithme est la bijection réciproque de $ln(exp(x)) = x$
Le logarithme est l'unique fonction telle que $f(x * y) = f(x) + f(y)$

L'exponentielle et le logarithme népérien sont des cas particuliers de fonctions plus générales appelées respectivement fonctions exposant et fonctions logarithme.
Les fonctions exposant sont les fonctions de la forme f(x) $= a^x$ a $\in \mathbb{R}$ et leurs fonction logarithme réciproque associées sont notées log_a et on parle de logarithme de base a. Il est possible de dire que ln est le logarithme de base e
On a $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $a^x = e^{x*\ln(a)}$

3. Quelques propriétés :

Exponentielle

$$e^{2a} = e^{a+a} = e^a e^a = (e^a)^2$$

Généralisation :

$$e^{a*b} = (e^a)^b$$

De cette formule, on a aussi la positivité et la croissance de l'exponentielle, en effet :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} / x = 2y\ d'où\ e^x = (e^y)^2 \geq 0$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x +\infty$$

$$\lim_{x \mp \infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Dérivée

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}\ (application\ de\ (fog)' = g' * f'og)$$

et la croissance est due à $(e^x)' = e^x$

$$\text{il s'en déduit que} \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$$

$$e^{-a} = (e^a)^{-1} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^0 = e^{(a-a)} = \frac{e^a}{e^a} = 1$$

Logarithme

$$\ln(a^2) = \ln(a * a) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$$

Généralisation :

$$\ln\left(a^\lambda\right) = \lambda \ln(a)$$

$$-\ln(a) = \ln(a^{-1}) = \ln(\frac{1}{a})$$

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln(a) - \ln(a) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} +\infty$$

$$\lim_{x \mp \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$a^\lambda = e^{\lambda \ln(a)}$$